Exámenes de Selectividad

Matemáticas. Andalucía 2023, Extraordinaria

mentoor.es

Ejercicio 1. Análisis

Sea la función $\mathbf{f} : [-2, 2\pi] \to \mathbb{R}$, definida por

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} 5x+1 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ e^x \cos(x) & \text{si } 0 < x \leq 2\pi \end{cases}$$

a) **Halla los extremos relativos y absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).**
b) **Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $\mathbf{x = \frac{\pi}{2}}$.**

Solución:

a) **Halla los extremos relativos y absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).**

- Intervalo $[-2, 0]$: La función es lineal, $f(x) = 5x + 1$. Es creciente, sin extremos relativos internos.

$$f(-2) = 5(-2) + 1 = -9,$$
$$f(0) = 1.$$

- Intervalo $(0, 2\pi]$: Derivamos:

$$f'(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x)).$$

Igualamos a cero para hallar puntos críticos:

$$\cos(x) - \sin(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4}, \ \frac{5\pi}{4}.$$

Para justificar que $x = \frac{\pi}{4}$ sea máximo relativo y $x = \frac{5\pi}{4}$ sea mínimo relativo, estudiamos el signo de $f'(x)$ en los subintervalos:

Intervalo en x	$\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Evaluamos la función en los extremos y puntos críticos:

$$f(0^+) = e^0 \cos(0) = 1,$$
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\pi/4} \cos(\pi/4) = \frac{e^{\pi/4}\sqrt{2}}{2},$$
$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = e^{5\pi/4} \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{-e^{5\pi/4}\sqrt{2}}{2},$$
$$f(2\pi) = e^{2\pi} \cos(2\pi) = e^{2\pi}.$$

Comparando los valores:

- Extremo absoluto mínimo en $x = -2$: $f(-2) = -9$.
- Extremo absoluto máximo en $x = 2\pi$: $f(2\pi) = e^{2\pi}$.
- Extremo relativo máximo en $x = \frac{\pi}{4}$.
- Extremo relativo mínimo en $x = \frac{5\pi}{4}$.

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\text{Mínimo Abs.} = (-2, -9), \quad \text{Máximo Abs.} = (2\pi, e^{2\pi}), \quad \text{Máx. Rel.} = \frac{\pi}{4}, \quad \text{Mín. Rel.} = \frac{5\pi}{4}}$$

b) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $\mathbf{x = \frac{\pi}{2}}$.

La función en $x = \frac{\pi}{2}$ vale:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi/2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Calculamos la derivada en $x = \frac{\pi}{2}$:

$$f'(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x)) \quad \Rightarrow \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi/2}(\cos(\frac{\pi}{2}) - \sin(\frac{\pi}{2})) = -e^{\pi/2}.$$

La recta tangente en $x = \frac{\pi}{2}$ es:

$$y - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad y = -e^{\pi/2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{y = -e^{\pi/2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Ejercicio 2. Análisis

Sea $\mathbf{f} : (\mathbf{0}, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(\ln(\mathbf{x}))^{\mathbf{2}}$ (*ln* denota la función logaritmo neperiano).

a) **Calcula, si existen, sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).**
b) **Calcula, si existen, sus extremos absolutos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).**

Solución:

a) **Calcula, si existen, sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).**

Para hallar los extremos relativos, derivamos la función:

$$f(x) = x(\ln(x))^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (\ln(x))^2 + 2\ln(x).$$

Igualamos la derivada a cero para puntos críticos:

$$\begin{aligned} (\ln(x))^2 + 2\ln(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \ln(x)(\ln(x)+2) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \ln(x) = 0 \quad \text{o} \quad \ln(x) = -2 \\ &\Rightarrow \quad x = 1 \quad \text{o} \quad x = e^{-2}. \end{aligned}$$

Estudiamos la monotonía en intervalos determinados por puntos críticos:

x	$(0, e^{-2})$	$(e^{-2}, 1)$	$(1, +\infty)$
$\ln(x)$	$-$	$-$	$+$
$\ln(x)+2$	$-$	$+$	$+$
$f'(x) = \ln(x)(\ln(x)+2)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Evaluamos los puntos críticos:

$$\begin{aligned} f(e^{-2}) &= e^{-2}(\ln(e^{-2}))^2 = e^{-2}(-2)^2 = 4e^{-2}, \\ f(1) &= 1 \cdot (\ln(1))^2 = 0. \end{aligned}$$

Entonces,
- Extremo relativo *máximo* en $x = e^{-2}$ con valor $4e^{-2}$.
- Extremo relativo *mínimo* en $x = 1$ con valor 0.

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\text{Máximo Rel.} = (e^{-2}, 4e^{-2}), \quad \text{Mínimo Rel.} = (1, 0)}$$

b) **Calcula, si existen, sus extremos absolutos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).**

Analizamos extremos absolutos. Estudiamos límites en los extremos del dominio:

$$\lim_{x\to 0^+} x(\ln(x))^2 = 0,$$

$$\lim_{x\to +\infty} x(\ln(x))^2 = +\infty.$$

Comparando con los valores en puntos críticos:

- No existe máximo absoluto, ya que la función crece indefinidamente cuando $x \to +\infty$.
- Existe un mínimo absoluto en $x = 1$ con valor $f(1) = 0$, ya que es el menor valor que toma la función en todo el dominio.

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\text{No existe máximo absoluto,} \quad \text{Mínimo absoluto} = (1, 0)}$$

Ejercicio 3. Análisis

Calcula a con $\mathbf{0 < a < 1}$, tal que $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{1}} \frac{\ln(\mathbf{x})}{\mathbf{x}}\,\mathbf{dx} + \mathbf{2} = \mathbf{0}$ (*ln* denota la función logaritmo neperiano).

Solución:

Calculamos primero la integral indefinida:

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx.$$

Realizamos el cambio de variable:

$$u = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad dx = x\,du.$$

La integral se convierte en:

$$\int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\ln(x))^2}{2} + C.$$

Ahora, evaluamos la integral definida:

$$\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \left[\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_a^1 = \frac{(\ln(1))^2 - (\ln(a))^2}{2} = -\frac{(\ln(a))^2}{2},$$

ya que $\ln(1) = 0$. Según el enunciado:

$$-\frac{(\ln(a))^2}{2} + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(\ln(a))^2}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad (\ln(a))^2 = 4.$$

Esto implica que

$$\ln(a) = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad a = e^{\pm 2}.$$

Dado que $0 < a < 1$, escogemos la solución:

$$a = e^{-2}.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{a = e^{-2}}$$

Ejercicio 4. Análisis

Considera las funciones $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $\mathbf{g}:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ definidas por $\mathbf{f(x)=5-x^2}$ y $\mathbf{g(x)=\frac{4}{x^2}}$.

a) **Esboza las gráficas de las dos funciones y calcula los puntos de corte entre ellas.**
b) **Calcula la suma de las áreas de los recintos limitados por las gráficas de f y g.**

Solución:

a) **Esboza las gráficas de las dos funciones y calcula los puntos de corte entre ellas.**

Calculamos los puntos de intersección entre ambas funciones igualándolas:

$$5-x^2=\frac{4}{x^2} \quad\Rightarrow\quad 5x^2-x^4=4.$$

Simplificando,

$$x^4-5x^2+4=0.$$

Realizamos el cambio $y=x^2$:

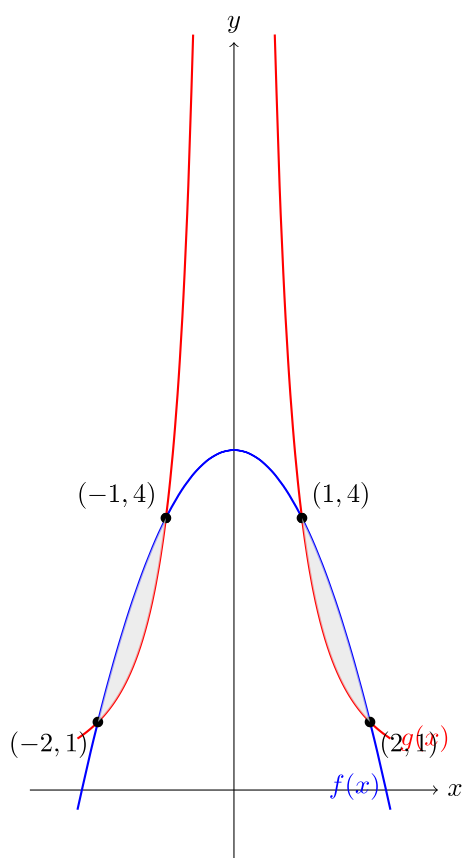
$$y^2-5y+4=0 \quad\Rightarrow\quad y=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 4}}{2} \quad\Rightarrow\quad y=1,\ y=4.$$

Volviendo a x:

$$x^2=1 \quad\Rightarrow\quad x=\pm 1, \qquad x^2=4 \quad\Rightarrow\quad x=\pm 2.$$

Entonces, si calculamos la segunda coordenada de los puntos en cualquiera de las dos funciones, se encuentra que los puntos de corte son:

$$(-2,1),\quad (-1,4),\quad (1,4),\quad (2,1).$$



Por lo tanto, los puntos de corte son:

$$\boxed{(-2,1),\ (-1,4),\ (1,4),\ (2,1)}$$

b) Calcula la suma de las áreas de los recintos limitados por las gráficas de f y g.

Por simetría, podemos calcular el área en $x > 0$ y multiplicar por 2:

$$A = 2\int_1^2 (f(x) - g(x))\,dx = 2\int_1^2 \left(5 - x^2 - \frac{4}{x^2}\right) dx.$$

Integramos término a término:

$$\begin{aligned} A &= 2\left[5x - \frac{x^3}{3} + \frac{4}{x}\right]_1^2 \\ &= 2\left[\left(10 - \frac{8}{3} + 2\right) - \left(5 - \frac{1}{3} + 4\right)\right] \\ &= 2\left[\left(12 - \frac{8}{3}\right) - \left(9 - \frac{1}{3}\right)\right] \\ &= 2\left(3 - \frac{7}{3}\right) = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\ u^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la suma de las áreas es:

$$\boxed{\frac{4}{3}\ u^2}$$

Ejercicio 5. Álgebra

Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **e I la matriz identidad de orden 3.**

a) **Halla los valores de m para que la matriz A − mI no tenga inversa.**
b) **Halla x, distinto de cero, para que A − xI sea la inversa de la matriz** $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}(\mathbf{A}-\mathbf{I})$**.**

Solución:

a) **Halla los valores de m para que la matriz A − mI no tenga inversa.**

La matriz $A - mI$ es:

$$A - mI = \begin{pmatrix} 1-m & 1 & 1 \\ 1 & 1-m & 1 \\ 1 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante para hallar cuándo no tiene inversa (cuando su determinante es cero):

$$\det(A - mI) = \begin{vmatrix} 1-m & 1 & 1 \\ 1 & 1-m & 1 \\ 1 & 1 & 1-m \end{vmatrix}$$

Calculando este determinante, tenemos:

$$\begin{aligned}
\det(A - mI) &= (1-m)\left[(1-m)^2 - 1\right] - 1\,[1(1-m) - 1] + 1\,[1 - (1-m)] \\
&= (1-m)(1 - 2m + m^2 - 1) - (1 - m - 1) + (1 - 1 + m) \\
&= (1-m)(m^2 - 2m) - (-m) + m \\
&= (1-m)(m^2 - 2m) + m + m \\
&= (1-m)(m^2 - 2m) + 2m \\
&= m^2 - 2m - m^3 + 2m^2 + 2m \\
&= -m^3 + 3m^2.
\end{aligned}$$

Para que no exista inversa, el determinante debe ser 0:

$$-m^3 + 3m^2 = 0.$$

Por tanto,

$$m^2(-m + 3) = 0.$$

Esto implica que

$$m = 0 \quad \text{o} \quad -m + 3 = 0.$$

De la segunda ecuación obtenemos $m = 3$.

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{m = 0, \quad m = 3}$$

b) **Halla x, distinto de cero, para que A − xI sea la inversa de la matriz** $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}(\mathbf{A}-\mathbf{I})$**.**

Para que dos matrices sean inversas, su producto debe ser la identidad:

$$(A - xI) \cdot \frac{1}{x}(A - I) = I.$$

Multiplicamos primero sin el factor $\frac{1}{x}$:

$$\begin{aligned}(A-xI)(A-I) &= A^2 - A - xA + xI \\ &= \begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} - x\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x&x&x\\x&x&x\\x&x&x\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x&0&0\\0&x&0\\0&0&x\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}2-x+x & 2-x+0 & 2-x+0\\2-x+0 & 2-x+x & 2-x+0\\2-x+0 & 2-x+0 & 2-x+x\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}2 & 2-x & 2-x\\2-x & 2 & 2-x\\2-x & 2-x & 2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ahora multiplicamos por el factor $\frac{1}{x}$:

$$\frac{1}{x}(A-xI)(A-I) = \frac{1}{x}\begin{pmatrix}2 & 2-x & 2-x\\2-x & 2 & 2-x\\2-x & 2-x & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{x} & \frac{2-x}{x} & \frac{2-x}{x}\\ \frac{2-x}{x} & \frac{2}{x} & \frac{2-x}{x}\\ \frac{2-x}{x} & \frac{2-x}{x} & \frac{2}{x}\end{pmatrix}.$$

Para que esta matriz sea igual a la identidad I, debemos tener:

$$\frac{2}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{2-x}{x} = 0.$$

De la primera ecuación se concluye directamente que:

$$\frac{2}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

Comprobamos si este valor de x satisface la segunda ecuación:

$$\frac{2-2}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{x = 2}$$

Ejercicio 6. Álgebra

El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por un importe de 500 euros sin incluir impuestos. El gasto en vino es 60 euros menos que los gastos en refrescos y cerveza conjuntamente, sin incluir impuestos. Teniendo en cuenta que los impuestos de los refrescos, la cerveza y el vino son el 6%, el 12% y el 30%, respectivamente, entonces el importe total de la factura incluyendo impuestos ha ascendido a 592,4 euros. Calcula el importe, incluyendo impuestos, invertido en cada una de las bebidas.

Solución:

Sean:

- x el gasto en refrescos sin impuestos,
- y el gasto en cerveza sin impuestos,
- z el gasto en vino sin impuestos.

Según el enunciado:

$$x + y + z = 500 \quad \text{(importe sin impuestos)},$$

$$z = (x + y) - 60 \quad \text{(el vino es 60 euros menos que refrescos y cerveza)}.$$

Además, incluyendo impuestos, el importe es 592,4 euros. Entonces,

$$1,06x + 1,12y + 1,30z = 592,4.$$

Sustituyendo z en ambas ecuaciones por $(x + y - 60)$:

$$x + y + (x + y - 60) = 500 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y = 560 \quad \Rightarrow \quad x + y = 280,$$

$$1,06x + 1,12y + 1,30(x + y - 60) = 592,4 \quad \Rightarrow \quad 2,36x + 2,42y = 670,4.$$

Ahora tenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y & = 280 \\ 2,36x + 2,42y & = 670,4 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema multiplicando la primera ecuación por 2,36:

$$\begin{cases} 2,36x + 2,36y & = 660,8 \\ 2,36x + 2,42y & = 670,4 \end{cases}$$

Restamos ambas ecuaciones para obtener y:

$$(2,42 - 2,36)y = 670,4 - 660,8 \quad \Rightarrow \quad 0,06y = 9,6 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{9,6}{0,06} = 160.$$

Calculamos ahora x:

$$x + 160 = 280 \quad \Rightarrow \quad x = 120.$$

Finalmente, calculamos z:

$$z = x + y - 60 = 120 + 160 - 60 = 220.$$

Calculamos ahora los importes incluyendo impuestos:

$$\text{Refrescos (6\%): } 120 \cdot 1,06 = 127,2 \text{ euros,}$$

$$\text{Cerveza (12\%): } 160 \cdot 1,12 = 179,2 \text{ euros,}$$

$$\text{Vino (30\%): } 220 \cdot 1,30 = 286 \text{ euros.}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\text{Refrescos: } 127,2 \text{ euros,} \quad \text{Cerveza: } 179,2 \text{ euros,} \quad \text{Vino: } 286 \text{ euros}}$$

Ejercicio 7. Geometría

Considera los planos $\pi_1 \equiv \mathbf{x - y + z = 0}$ y $\pi_2 \equiv \mathbf{x + y = 2}$.

a) **Calcula la distancia entre la recta intersección de π_1 y π_2 y el punto $\mathbf{P(2, 6, -2)}$.**
b) **Halla el ángulo que forman π_1 y π_2.**

Solución:

a) **Calcula la distancia entre la recta intersección de π_1 y π_2 y el punto $\mathbf{P(2, 6, -2)}$.**

La recta intersección se obtiene resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Tomando y como parámetro λ, resulta:

$$x = 2 - \lambda, \quad z = y - x = \lambda - (2 - \lambda) = 2\lambda - 2.$$

Así, la recta intersección es:

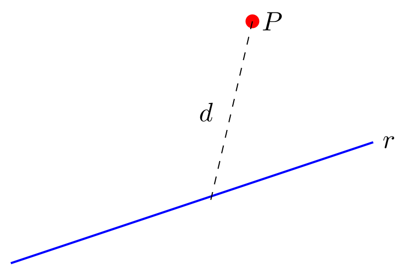
$$r : (2 - \lambda,\ \lambda,\ 2\lambda - 2), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sea $P = (2, 6, -2)$. La distancia del punto a la recta se obtiene mediante el producto vectorial:

$$d = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|},$$

donde A es un punto de la recta (tomando $\lambda = 0$, $A = (2, 0, -2)$) y el vector director es:

$$\vec{v} = (-1, 1, 2).$$



Entonces,

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (2 - 2, 6 - 0, -2 + 2) = (0, 6, 0).$$

El producto vectorial es:

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (12, 0, 6).$$

Su módulo es:

$$|(12, 0, 6)| = \sqrt{12^2 + 0^2 + 6^2} = \sqrt{144 + 36} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}.$$

La distancia pedida es:

$$d = \frac{6\sqrt{5}}{|(-1, 1, 2)|} = \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \sqrt{30}.$$

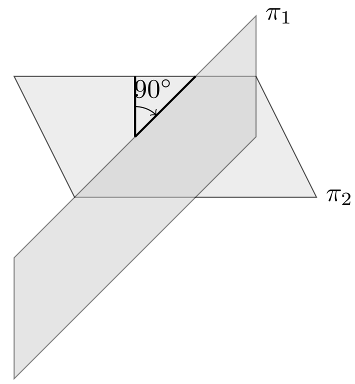
Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\sqrt{30}}$$

b) Halla el ángulo que forman π_1 y π_2.

Los vectores normales de los planos son:

$$\vec{n}_1 = (1, -1, 1), \quad \vec{n}_2 = (1, 1, 0).$$



El ángulo entre los planos es el ángulo entre estos vectores normales:

$$\cos(\theta) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{|1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|0|}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = 0.$$

Por tanto,

$$\theta = 90^\circ.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{90^\circ}$$

Ejercicio 8. Geometría

Calcula el volumen del tetraedro que limita el plano determinado por los puntos A(0, 2, −2), B(3, 2, 1) y C(2, 3, 2) con los planos cartesianos.

Solución:

El tetraedro está formado por el plano determinado por los puntos A, B y C y los planos cartesianos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Primero, hallamos la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C:

$$\overrightarrow{AB} = (3, 0, 3), \quad \overrightarrow{AC} = (2, 1, 4).$$

Obtenemos el vector normal al plano mediante el producto vectorial:

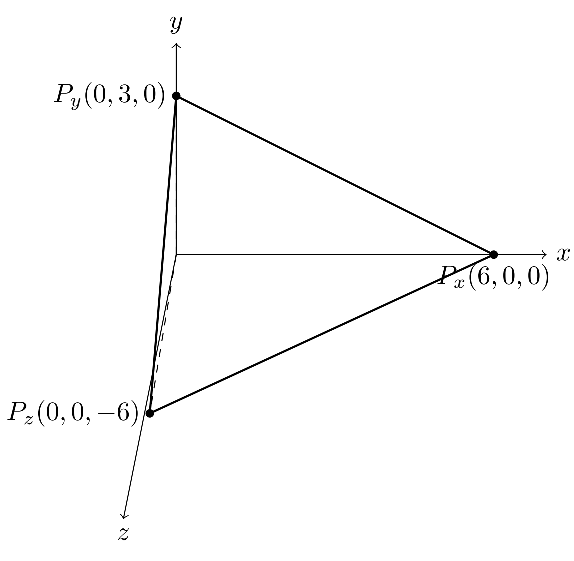
$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-3, -6, 3).$$

La ecuación del plano es, por tanto:

$$-3(x-0) - 6(y-2) + 3(z+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x - 6y + 12 + 3z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 2y - z = 6.$$

Encontramos los puntos de intersección con los ejes coordenados:

$$\begin{aligned} &\text{Con el eje } x: \quad y = 0, z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 6, \quad P_x = (6, 0, 0). \\ &\text{Con el eje } y: \quad x = 0, z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3, \quad P_y = (0, 3, 0). \\ &\text{Con el eje } z: \quad x = 0, y = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -6, \quad P_z = (0, 0, -6). \end{aligned}$$



El volumen del tetraedro es un sexto del valor absoluto del producto escalar del vector posición de uno de los puntos con el producto vectorial de los otros dos:

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{OP_x} \cdot (\overrightarrow{OP_y} \times \overrightarrow{OP_z})\right|,$$

siendo $O = (0, 0, 0)$:

$$\overrightarrow{OP_x} = (6, 0, 0), \quad \overrightarrow{OP_y} = (0, 3, 0), \quad \overrightarrow{OP_z} = (0, 0, -6).$$

Calculamos primero el producto vectorial:

$$\overrightarrow{OP_y} \times \overrightarrow{OP_z} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = (-18, 0, 0).$$

Luego, el producto escalar:

$$\overrightarrow{OP_x} \cdot (-18, 0, 0) = (6, 0, 0) \cdot (-18, 0, 0) = -108.$$

Finalmente, el volumen del tetraedro es:

$$V = \frac{1}{6}|-108| = \frac{108}{6} = 18\ u^3.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{18\ u^3}$$